

dimostrazione dell'invalidità dell'effetto Mpemba

Giuseppe Verde

Università di Napoli

Abstract

Viene descritta la dimostrazione dell'invalidità dell'effetto Mpemba con i processi termodinamici e il suo metodo operativo.

L'effetto Mpemba è un processo in cui l'acqua calda può congelare più velocemente dell'acqua fredda.

Questa affermazione è contro-intuitiva. In effetti, l'effetto Mpemba infrange le leggi termodinamiche fondamentali. Infatti, non ci sono prove significative della validità dell'effetto Mpemba [1]:

- Il fenomeno, se inteso come "congelamento dell'acqua calda più veloce dell'acqua fredda", è difficile da riprodurre o confermare perché questa affermazione è mal definita;
- Sebbene l'effetto Mpemba sia reale, non è chiaro se la spiegazione sia banale o illuminante.

Tuttavia, con queste definizioni, questo effetto non è mai stato chiaro. D'altra parte, ci sono molte circostanze in cui l'effetto non è osservato. I principali riferimenti all'effetto risalgono almeno agli scritti di Aristotele [2], ma mostrerò che questo effetto è sbagliato. Inoltre, mostrerò le prove disponibili per la negazione dell'effetto Mpemba e svolgerò i miei esperimenti mediante il raffreddamento dell'acqua in condizioni attentamente controllate. Descriverò una dimostrazione matematica che viola il principio fisico, arrivando a una contraddizione delle leggi termodinamiche. La dimostrazione mostrerà che quindi l'effetto Mpemba non può verificarsi e non esiste se i

parametri iniziali sono equivalenti correttamente. La vasta gamma di esperimenti multidimensionale richiesta spiega perché l'effetto non è ancora stato compreso e dimostrato.

Pertanto, è immediato verificare che tutte le relazioni precedenti / storiche siano il risultato di una cattiva tecnica sperimentale, poiché evidentemente è partita da presupposti errati. È importante e necessario sottolineare che per convalidare la tesi: tutte le condizioni devono essere le stesse in ogni momento.

Introduction

Per descrivere questo fenomeno, in passato sono state proposte alcune spiegazioni. Tuttavia, le seguenti osservazioni studiate non sono sufficienti a risolvere l'effetto, tra cui:

- Evaporazione: l'evaporazione dell'acqua più calda riduce la massa dell'acqua da congelare [3].

Ma mostrerò che questa tesi non è valida per l'esperimento osservato. La ragione è molto semplice: l'evaporazione dell'acqua provocherebbe una diminuzione della massa. Pertanto, l'esperimento non può essere considerato valido poiché le caratteristiche iniziali sono cambiate. La massa del sistema non può cambiare, quindi la quantità non può essere aggiunta né rimossa.

Ad ogni modo, se le differenze di massa sono presenti e considerate valide per l'esperimento osservato, sono trascurabili, perché non cambiano significativamente il tempo necessario per congelare l'acqua.

- Convezione: accelerazione dei trasferimenti di calore. Nell'acqua più calda, il movimento della convezione migliora lo scambio di calore con l'ambiente esterno [4]. Una maggiore convezione nell'acqua più calda può diffondere i cristalli di ghiaccio più velocemente. Questa tesi, se supposta valida, ha un limite.

Si considera che:

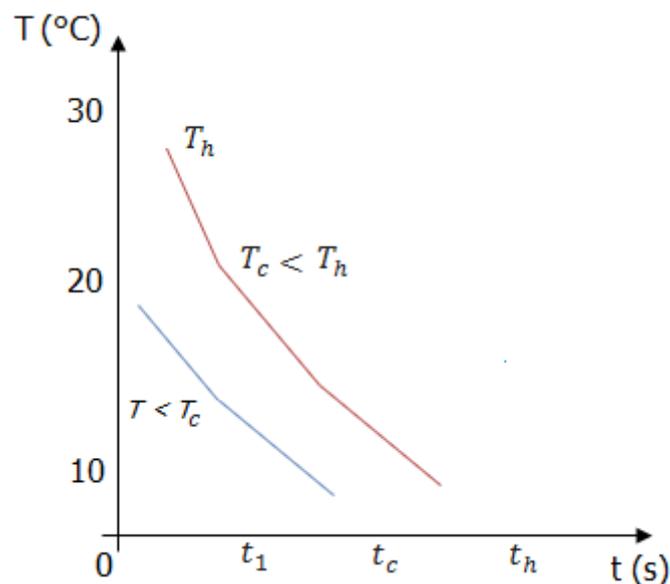
- T_h = temperatura dell'acqua più calda.
- T_c = temperatura dell'acqua più fredda.

- t_h = tempo di congelamento per l'acqua più calda.
- t_c = tempo di congelamento per l'acqua più fredda.

In questo esperimento, voglio raffreddare l'acqua a 0°C per due campioni di acqua. Suppongo che l'acqua più calda impieghi un tempo t_1 per passare dalla temperatura T_h alla temperatura T_c . Nel frattempo, l'acqua più fredda assume una temperatura $T < T_c$. Dall'istante del tempo t_1 , l'acqua più calda procederà alla stessa velocità dell'acqua più fredda, ma a una temperatura più alta. Pertanto, l'acqua più calda raggiungerà la temperatura di 0°C in un tempo $t_h > t_c$. La Tabella 1 mostra l'effetto termico spiegato attraverso una rappresentazione asintotica.

Table 1

A graph of freezing rates for the two water samples



- Frost: avrebbe effetti isolanti. L'acqua più fredda tende a congelarsi dall'alto, riducendo ulteriormente la perdita di calore, mentre l'acqua più calda tende a congelarsi dal fondo.

Allo stesso modo, la dimostrazione precedente per il processo di convezione può essere utilizzata anche in questo caso.

- Conduttività termica: l'acqua più calda può sciogliersi attraverso uno strato di brina che funge da isolante, permettendo all'acqua di entrare in contatto diretto con uno strato inferiore molto più freddo. Pertanto, l'acqua più calda si raffredda molto più rapidamente da questo punto in poi.

Ma anche in questo caso mostrerò che questa tesi non è valida per l'esperimento: l'acqua più calda assorbe più energia termica. Pertanto, l'esperimento non può essere considerato valido poiché le condizioni iniziali delle osservazioni sono diverse.

Infine, tutti gli altri casi sono attribuibili alla precedente dimostrazione per il processo di convezione, tra cui:

- Gas disciolti: l'acqua più fredda contiene più gas disciolti rispetto all'acqua più calda. Questo fenomeno cambierebbe le proprietà dell'acqua rispetto alle correnti di convezione.
- Legame idrogeno: in acqua calda, il legame idrogeno è più debole.
- Cristallizzazione: l'acqua più calda potrebbe essere responsabile della cristallizzazione più veloce a causa della popolazione relativamente più elevata di stati di esamero [5].
- Funzione di distribuzione: dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann mostrata nei gas [6].

Se questi fenomeni sono presenti, sono considerati validi in un tempo limitato per l'esperimento osservato.

È quindi chiaro che la spiegazione è banale. Sebbene l'effetto Mpemba possa essere reale, è solo la conseguenza di caratteristiche ovvie.

Theoretical references

Il calore sensibile è definito come il calore scambiato da un corpo o da un sistema termodinamico, che produce una diminuzione della differenza di temperatura, ma lasciando invariati gli altri parametri termodinamici, come il volume e la pressione [7] [8] [9] [10].

Il calore sensibile (Q_s) di un processo termico può essere calcolato come il prodotto della massa del sistema termodinamico (m) con la sua capacità termica specifica (c) e il cambiamento di temperatura (ΔT):

$$Q_s = mc\Delta T$$

Come forma di energia, il calore (Q) ha l'unità joule (J) nel Sistema Internazionale di Unità (SI), mentre l'unità di massa del Sistema Internazionale di Unità (SI) standard è il chilogrammo (kg). La capacità termica, è definita come il rapporto tra il calore aggiunto o rimosso da un sistema termodinamico al cambiamento di temperatura risultante. L'unità di capacità termica è joule per kelvin nel Sistema internazionale di unità (SI):

$$\frac{J}{K}$$

La capacità termica specifica, invece, è la capacità termica per unità di massa di un sistema termodinamico:

$$\frac{J}{kgK}$$

Infatti, nella scienza e nell'ingegneria, le proprietà termodinamiche sono spesso definite dal termine specifico [11] [12].

Il termine Q_s viene utilizzato in modo diverso con il calore latente (Q_L). Il calore latente è l'energia termica rilasciata o assorbita da un sistema termodinamico durante un processo isotermico e isobarico, coinvolto rispettivamente in variazioni di fase a una temperatura e pressione specificate. Si definisce calore latente di fusione per una sostanza che condensa e calore latente di vaporizzazione per una sostanza che vaporizza [13] [14]. Da questa definizione, il calore latente (Q_L) per una data massa

(m) di una sostanza del sistema termodinamico considerato, necessaria per la transizione di fase, è:

$$Q_L = m\lambda$$

Dove λ è il calore latente specifico per una particolare sostanza:

$$\frac{Q_L}{m}$$

Nella letteratura scientifica sono comunemente citati/tabulati e definiti lo specifico calore latente di fusione (λ_f) e lo specifico calore latente di vaporizzazione (λ_v) per descrivere una sostanza di un sistema termodinamico.

Il calore sensibile e il calore latente descrivono gli scambi di calore in condizioni prefissate/specificate. Pertanto, non sono forme speciali di energia e non sono descritte come proprietà di un sistema o contenute in esso, perché il calore è definito come l'energia trasferita spontaneamente da un sistema termodinamico più caldo a uno più freddo [15] [16].

Invece, la potenza termica è la quantità di calore/energia termica (Q) trasferita per unità di tempo (t). La Potenza termica (\dot{Q}) (equivalently P_t), in funzione del tempo, è la velocità con cui il lavoro viene svolto, quindi può essere espresso da questa equazione:

$$P_t = \frac{Q}{t}$$

L'unità standard per la velocità del calore trasferito è il watt (W), definito come un joule al secondo:

$$W = \frac{J}{s}$$

Mpemba effect

L'effetto prende il nome da Erasto Mpemba, descritto nel 1963 [17] [18]. Il fenomeno, inteso come "congelamento dell'acqua calda più veloce dell'acqua fredda", è impossibile se le condizioni delle osservazioni sono identiche, in quanto violerebbe la prima o la seconda legge della termodinamica.

Thought experiment

Vale la pena ricordare alcune ipotesi/principi, allo scopo di pensare attraverso le sue conseguenze. L'obiettivo comune di questo esperimento mentale è quello di esplorare le potenziali conseguenze dell'effetto in questione, calcolato applicando teoricamente le leggi della fisica, eseguite per supportare, confutare e validare le osservazioni di questa ricerca.

Proposizione Fondamentale: se prendiamo due contenitori simili con volumi uguali di acqua, uno più caldo e l'altro più freddo, e li mettiamo in un congelatore, l'acqua più fredda si congela per prima ($T_f = 273,15 \text{ K}$).

Demonstration

[19] New Scientist raccomanda di iniziare l'esperimento con contenitori/recipienti a: 35° C per la temperatura dell'acqua più calda (T_h) e 5° C per la temperatura dell'acqua più fredda (T_c), per massimizzare l'effetto Mpemba.

1) Si evidenzia che l'acqua più calda ha le seguenti proprietà:

temperatura (T) = $308,15 \text{ K}$; massa (m) = $137,50 \text{ g} = 0,1375 \text{ kg}$; capacità termica specifica (c) = $\frac{4,183 \text{ kJ}}{\text{kgK}}$; densità (ρ) = $994 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; volume specifico (v, ρ^{-1}) = $0,001006 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 1,006 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}}$; volume (V) = $138,30 \text{ ml}$.

Da queste proprietà, è possibile calcolare il calore specifico:

$$Q_{sh} = mc\Delta T_{sh} = 20,13 \text{ kJ}$$

La capacità termica è spesso influenzata da molte delle variabili di stato che descrivono il sistema termodinamico, tra cui la temperatura, la pressione e il volume. Quindi, ci sono in realtà diverse misurazioni della capacità termica. I metodi di misurazione più comunemente utilizzati sono quelli di mantenere il sistema termodinamico a pressione o a volume costante. In questo caso specifico, il metodo usato per la misurazione è a pressione costante. Pertanto, a pressione costante:

$$Q_{sh} = m\Delta h_{sh}$$

L'entalpia di una sostanza del sistema termodinamico descrive il trasferimento di energia in molte forme, cioè il calore [20].

L'entalpia (H) di un sistema termodinamico è uguale alla somma dell'energia interna del sistema con il prodotto del suo volume e della sua pressione [21] [22].

Per i processi isobarici, il calore assorbito o rilasciato è uguale al cambiamento di entalpia.

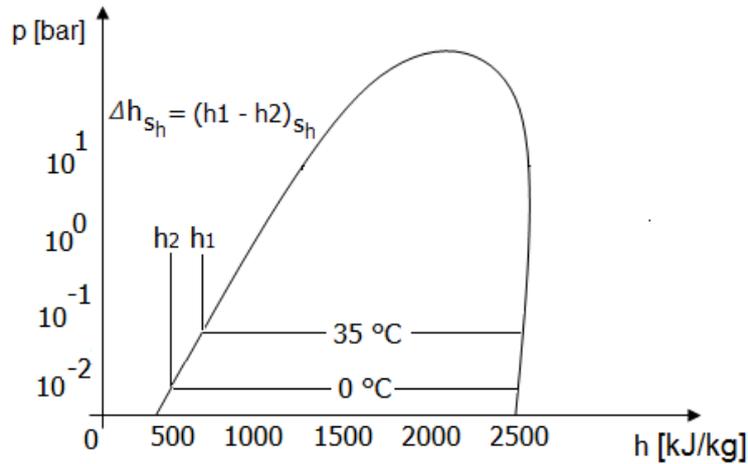
L'unità di misura per l'entalpia nel Sistema Internazionale di Unità (SI) è il joule (J). Considerando che, l'unità SI per l'entalpia specifica (h) è joule per chilogrammo:

$$\frac{J}{kg}$$

Vale la pena ricordare/osservare il processo termodinamico usando il diagramma p-h nella tabella 2:

Table 2

p-h diagram of freezing for the hottest water



Con $h_1 = 646,70 \frac{kJ}{kg}$ e $h_2 = 500,06 \frac{kJ}{kg}$. Quindi: $\Delta h_{sh} = 146,64 \frac{kJ}{kg} = c\Delta T_{sh}$

2) Si evidenzia che l'acqua più fredda ha le seguenti proprietà:

temperatura (T) = 278,15 K; massa (m) = 137,50 g = 0,1375 kg; capacità termica specifica (c) = $\frac{4,200 kJ}{kgK}$; densità (ρ) = $1000 \frac{kg}{m^3}$; volume specifico (v , ρ^{-1}) = $0,001 \frac{m^3}{kg} = 1 \frac{dm^3}{kg}$; volume (V) = 137,50 ml.

Da queste proprietà, è possibile calcolare il calore specifico:

$$Q_{sc} = mc\Delta T_{sc} = 2,89 kJ$$

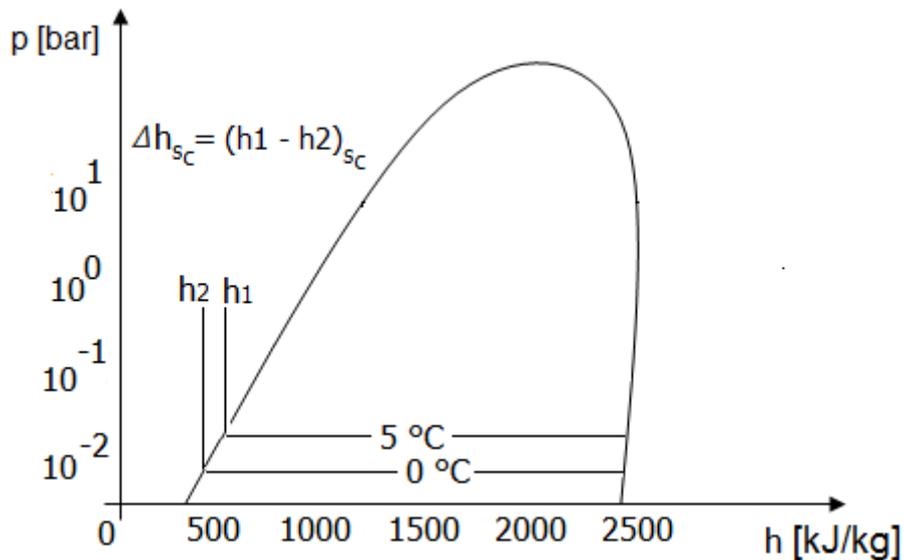
Anche in questo caso, il metodo usato per la misurazione è a pressione costante:

$$Q_{sc} = m\Delta h_{sc}$$

Vale la pena ricordare/osservare il processo termodinamico utilizzando il diagramma p-h nella tabella 3:

Table 3

p-h diagram of freezing for the coldest water



Con: $h_1 = 521,12 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ e $h_2 = 500,06 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Quindi: $\Delta h_{sc} = 21,06 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = c\Delta T_{sc}$

Ciò significa che il cambiamento di entalpia in tali condizioni è inferiore. L'entalpia per sostanze chimiche a pressione costante di solito si riferiscono allo stato standard: più comunemente ad una pressione di 1 bar.

La capacità di raffreddamento (\dot{Q}) è la misura della capacità del sistema di rimuovere il calore [23]. L'unità SI è il watt (W). L'equazione di base delle unità SI per descrivere la capacità di raffreddamento è nella forma:

$$\dot{Q} = \dot{m}c \Delta T$$

La portata massica (\dot{m}) è la massa di una sostanza che passa/scorre in una determinate sezione nell'unità di tempo. La sua unità SI è il chilogrammo al secondo. A volte, la portata massica è definita flusso di massa o corrente di massa [24].

Si suppone che i due contenitori con volumi uguali di acqua, uno più caldo e l'altro più freddo, siano posti in un congelatore con una capacità di raffreddamento predeterminata. Il tempo di raffreddamento (t) è misurato in secondi ed è determinato dalla seguente equazione:

$$t = \frac{Q_s}{\dot{Q}}$$

Si evidenzia che:

$$Q_{s_h} > Q_{s_c} \Rightarrow t_{s_h} > t_{s_c}$$

con:

$$t_{s_h} = \frac{Q_{s_h}}{\dot{Q}} > t_{s_c} = \frac{Q_{s_c}}{\dot{Q}}$$

Pertanto, a quanto pare, l'acqua più fredda si congela prima, ed è ciò che si voleva dimostrare.

In effetti, quando T_h raggiunge T_c :

$$T_c = T_h - \Delta T$$

Se invece per assurdo supponiamo che l'effetto Mpemba sia valido, allora:

$$t_{s_h} < t_{s_c}$$

Pertanto, vale la pena iniziare dalla prima legge della termodinamica per i sistemi chiusi per un processo infinitesimale:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

Dove U è l'energia interna, L è lavoro e Q è calore [25]. Il carico di pressione (p) (V) del sistema chiuso è definito come:

$$dU = \delta Q - p dV$$

La prima legge della termodinamica è spesso espressa in termini di entalpia:

$$dH = \delta Q + Vd_p$$

Per una trasformazione isobara (pressione costante), la prima legge della termodinamica è ridotta a:

$$\delta Q = dH$$

[26] [27] Si ricorda che l'entalpia di un sistema termodinamico è definita come:

$$H = U + pV$$

A proposito di questo, supponendo che: $t_{sh} < t_{sc}$ allora:

$$Q_{sh} < Q_{sc} \Rightarrow \Delta h_{sh} < \Delta h_{sc} \Rightarrow \Delta T_{sh} < \Delta T_{sc}$$

Anche in questo caso, come volevasi dimostrare, il risultato finale è un assurdo, poiché l'ipotesi iniziale era:

$$\Delta T_{sh} > \Delta T_{sc}$$

In effetti, l'effetto Mpemba viola le leggi termodinamiche fondamentali [29] [30] [31], perché:

$$(h_1 - h_2)_{sh} < c\Delta T_{sh} \Rightarrow \Delta S_{sh} < 0$$

ΔS_{sh} introduce la misura del cambiamento di entropia [32]. Il cambiamento di entropia termodinamica quantifica l'entità di alcuni cambiamenti termici come il trasferimento di calore tra i sistemi.

Nell'unità di sistema internazionale, l'entropia termodinamica (S) ha una dimensione di energia divisa per la temperatura e ha un'unità di joule per kelvin:

$$\frac{J}{K}$$

I sistemi chiusi tendono ad aumentare l'entropia che corrisponde al cambiamento irreversibile di energia consumato come calore residuo, limitando la quantità di lavoro che un sistema può fare [33] [34] [35] [36]. Allo stesso modo, per i sistemi isolati, l'entropia non diminuisce mai. Questo fatto ha diverse importanti conseguenze nella scienza fisica: in primo luogo, proibisce le macchine a energia libera, definite come "moto perpetuo"; e secondo, implica che la freccia di entropia è direttamente proporzionale alla freccia del tempo. Questo fatto porta a un'equazione/relazione conosciuta come la relazione termodinamica fondamentale [37]:

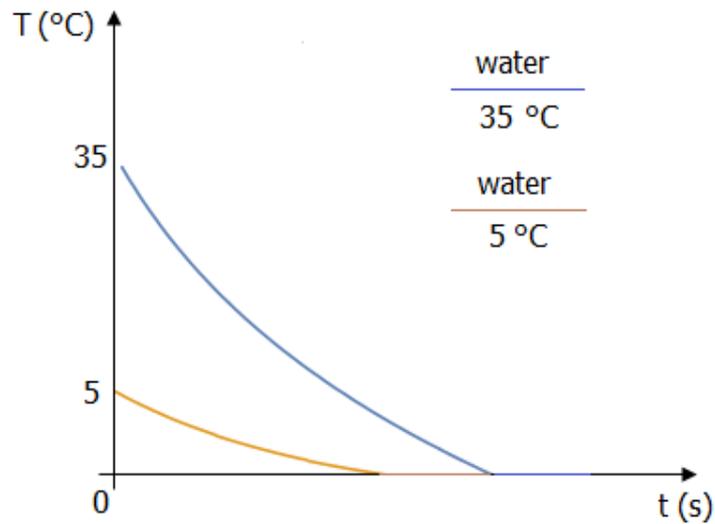
$$dU = T dS - p dV$$

Experimental Results

Per verificare l'esperimento, è stata eseguita una procedura per supportare, confutare e validare l'ipotesi / tesi precedentemente dimostrata. Gli esperimenti variano notevolmente in termini di obiettivi e dimensioni, ma si basano sempre su procedure ripetibili e analisi logica dei risultati. Per dimostrare sperimentalmente l'invalidità dell'effetto Mpemba, l'esperimento inizia con contenitori/recipienti a: 35 ° C per la temperatura dell'acqua più calda (T_h) e 5 °C per la temperatura dell'acqua più fredda (T_c). L'esperimento dovrebbe massimizzare l'effetto Mpemba [19]. Al contrario, i risultati sperimentali mostreranno che l'effetto Mpemba non si verifica. I seguenti dati sono stati ottenuti nella tabella 4:

Table 4

Cooling of water at 5 °C and 35 °C in a glass



L'esperimento è stato riprodotto in $n = 10$ diversi congelatori, con poche variazioni. I materiali e i metodi usati sono già noti [38]. Ma i risultati ottenuti sono diversi, in accordo con le leggi della termodinamica. Alcuni risultati sono stati ottenuti nella tabella 5, osservando 3 intervalli di 10 minuti:

Table 5

Cooling time of water at 5 °C and 35 °C in a glass

	$t_1 = 600 \text{ s}$	$t_2 = 1200 \text{ s}$	$t_3 = 1800 \text{ s}$
T_h	20,96 °C	12,55 °C	7,51 °C
T_c	1,95 °C	1,1 °C	0 °C

Come volevo dimostrare, l'acqua più fredda si congela prima:

$$t_{sh} > t_{sc}$$

Allo stesso modo, per un processo infinitesimale, se:

$$T_h - T_c = dT$$

allora:

$$t_{sh} - t_{sc} = dt$$

Le soluzioni/risultati precedenti hanno un andamento grafico della funzione esponenziale (nel semiasse positivo) quando la base b è compresa tra 0 e 1:

$$y = c b^x$$

In cui l'argomento x si presenta come un esponente e c si presenta come una costante che dipende dalle condizioni ambientali, dalle osservazioni iniziali, dalle proprietà e da molti altri fattori.

Conclusions

È stato dimostrato che l'effetto: "l'acqua calda può congelare più velocemente dell'acqua fredda" non è un effetto reale/corretto [39], ma è solo il risultato di operazioni banali. Le leggi della fisica sono universali e relative solo al sistema di riferimento considerato. Inoltre, [40] la definizione/la formulazione: "esiste una serie di parametri iniziali e una coppia di temperature tali che date due zone d'acqua identiche in questi parametri e che differiscono solo nelle temperature uniformi iniziali, quella calda si congela prima", non è valido per il seguente motivo: i parametri iniziali non sono equivalenti correttamente perché tutte le condizioni non sono le stesse in qualsiasi momento. Allo stesso modo, è ovvio che: "l'acqua calda si congela più velocemente del freddo", in particolare se:

$$\dot{Q}_h \gg \dot{Q}_c$$

e/o:

$$m_h \ll m_c \Rightarrow Q_h \ll Q_c$$

Pertanto, solo se questi diversi parametri/condizioni sono soddisfatti, allora esiste una coppia di temperature, tale che per i due campioni d'acqua: l'acqua più calda si congelerà prima.

Bibliography

- 1 - Ball, Philip. Does hot water freeze first? *Physics World*, pp. 19-26.
- 2 - Aristotle, *Meteorology*. 4th century BC.
- 3 - Kell, George S. The freezing of hot and cold water. *American Journal of Physics*, pp. 564-565.
- 4 - CITV Prove It! Series 1 Programme 13.
- 5 - Jin, Jaehyeok, Goddard III, William A. Mechanisms Underlying the Mpemba Effect in Water from Molecular Dynamics Simulations. *Journal of Physical Chemistry C.*, pp. 2622-2629.
- 6 - Lasanta, Antonio; Vega Reyes, Francisco; Prados, Antonio; Santos, Andrés. When the Hotter Cools More Quickly: Mpemba Effect in Granular Fluids. *Physical Review Letters*.
- 7 - Partington, J.R. *An Advanced Treatise on Physical Chemistry, Volume 1, Fundamental Principles. The Properties of Gases*, Longmans, Green, and Co., London, pp. 155-157.
- 8 - Prigogine, I., Defay, R. *Chemical Thermodynamics*, Longmans, Green & Co, London, pp. 22-23.
- 9 - Adkins, C.J. *Equilibrium Thermodynamics*, second edition, McGraw-Hill, London, pp. 43-46.
- 10 - Landsberg, P.T. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Oxford University, p. 11.
- 11 - International Union of Pure and Applied Chemistry, Physical Chemistry Division. "Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry". Blackwell Sciences. p. 7. The adjective specific before the name of an extensive quantity is often used to mean divided by mass.
- 12 - International Bureau of Weights and Measures, *The International System of Units (SI)*.
- 13 - Perrot, Pierre. *A to Z of Thermodynamics*. Oxford University Press.
- 14 - Clark, John, O.E. *The Essential Dictionary of Science*. Barnes & Noble Books.
- 15 - Robert F. Speyer. *Thermal Analysis of Materials*. Materials Engineering. Marcel Dekker, Inc. p. 2.

- 16 - Thomas W. Leland, Jr., G. A. Mansoori, ed., Basic Principles of Classical and Statistical Thermodynamics.
- 17 - Mpemba, Erasto B.; Osborne, Denis G. "Cool?". Physics Education. Institute of Physics. pp. 172-175.
- 18 - Mpemba, Erasto B.; Osborne, Denis G. "The Mpemba effect". Physics Education. Institute of Physics. pp. 410–412.
- 19 - Chown, Marcus. "Revealed: why hot water freezes faster than cold". New Scientist.
- 20 - Thermodynamics: An Engineering Approach by Yunus A. Cengel and Michael A. Boles.
- 21 - "Oxford Living Dictionaries".
- 22 - "IUPAC Gold Book. Enthalpy, H".
- 23 - Boles, Yunus A. Çengel, Michael A. Thermodynamics: an engineering approach. New York: McGraw-Hill. p. 608.
- 24 - Fluid Mechanics, M. Potter, D.C. Wiggart, Schuam's outlines, McGraw Hill.
- 25 - First Law of Thermodynamics". www.grc.nasa.gov
- 26 - Guggenheim, E. A. Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- 27 - Zumdahl, Steven S. "Thermochemistry". Chemistry. Cengage Learning. p. 243.
- 28 - Ebbing, Darrel; Gammon, Steven. General Chemistry. Cengage Learning. p. 231.
- 29 - andler, Stanley I. Chemical, biochemical, and engineering thermodynamics. New York: John Wiley & Sons. p. 91.
- 30 - Simon, Donald A. McQuarrie; John D. (1997). Physical chemistry: a molecular approach (Rev. ed.). Sausalito, Calif.: Univ. Science Books. p. 817.
- 31 - Haynie, Donald, T. (2001). Biological Thermodynamics. Cambridge University.
- 32 - Clausius, Rudolf. Annalen der Physik und Chemie. pp. 353–400.
- 33 - Licker, Mark D. (2004). McGraw-Hill concise encyclopaedia of chemistry.
- 34 - Sethna, James P. (2006). Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity.
- 35 - Daintith, John. A dictionary of science. Oxford University.
- 36 - de Rosnay, Joel. The Macroscopic – a New World View (written by an M.I.T.-trained biochemist). Harper & Row, Publishers.
- 37 - Schmidt-Rohr, K. "Expansion Work without the External Pressure, and Thermodynamics in Terms of Quasistatic Irreversible Processes". J. Chem. Educ. pp. 402–409.
- 38 - Bregović, Nikola; Mpemba effect from a viewpoint of an experimental physical chemist.
- 39 - Henry C. Burridge, Paul F. Linden. "Questioning the Mpemba effect: hot water does not cool more quickly than cold". Nature.

40 - Jeng, Monwhea. "Hot water can freeze faster than cold?!?". American Journal of Physics.